

© 2024 г. А.Н. ЖИРАБОК, д-р техн. наук (zhirabok@mail.ru),
А.В. ЗУЕВ, канд. техн. наук (alvzuev@yandex.ru)
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток;
Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток)

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ НАБЛЮДАТЕЛИ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ВХОДОВ В ДИСКРЕТНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ¹

Рассматривается задача оценивания неизвестных входов в дискретных стационарных (с постоянными параметрами) системах, описываемых динамическими моделями при наличии внешних возмущений, на основе интервальных наблюдателей. Решение основано на модели исходной системы, имеющей минимальную размерность, нечувствительной к возмущениям. Для этой модели строится интервальный наблюдатель, на основе которого определяется оценка величины неизвестных входов. Теоретические результаты иллюстрируются примером.

Ключевые слова: линейные системы, неизвестные входы, интервальные наблюдатели, оценивание.

DOI: 10.31857/S0005231024080018, EDN: WPYYGQ

1. Введение и постановка задачи

Задача оценивания неизвестных входов динамических систем имеет важное теоретическое и прикладное значение, в частности для определения величин изменений параметров системы из-за возникших дефектов для последующего парирования этих изменений или уровня внешних возмущений, что часто необходимо для их учета системой управления. При ее решении для систем, описываемых непрерывными моделями, последние 25 лет используются скользящие наблюдатели [1–3].

С другой стороны, для оценки компонент вектора состояния динамических систем последние годы применяются интервальные наблюдатели, которые в каждый момент времени вырабатывают оценку множества допустимых значений вектора состояния (или заданной линейной функции этого вектора) для различных классов динамических систем с неопределенностями. обстоятельные обзоры полученных за последнее время результатов содержатся в [4–6], решения для различных классов систем (непрерывных, дискретных, гибридных, с запаздыванием), а также практические приложения можно найти в [7–14]. Особенностью интервальных наблюдателей является то, что они позволяют простыми средствами учитывать различные виды

¹ Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 23-29-00191 (<https://rscf.ru/project/23-29-00191/>).

неопределенностей в системах (внешние возмущения, шумы измерений, параметрические неопределенности) и формировать интервал, в котором гарантированно находятся значения вектора состояния (или заданной линейной функции этого вектора).

В [15] интервальные наблюдатели предложено использовать для решения задачи оценивания неизвестных входов в дискретных линейных динамических системах. Этот метод является определенной альтернативой скользящим наблюдателям, которые неэффективны в дискретном случае.

В настоящей работе подход, предложенный в [15], развивается для решения задачи оценивания неизвестных входов в дискретных линейных и нелинейных динамических системах, подверженных внешним возмущениям. В отличие от [15] от системы не требуется быть минимально фазовой; кроме того, подход, предложенный в [15], предполагает проведение ряда сложных преобразований системы, в частности приведение ее к дескрипторному виду, чего не требуется в настоящей работе. В [15] по аналогии с [5–13] интервальный наблюдатель строится для исходной преобразованной системы, в результате чего он имеет полную размерность. В отличие от этого в настоящей работе для решения используется редуцированная модель исходной системы, что упрощает конструкцию интервального наблюдателя и дает возможность сделать его нечувствительным к внешним возмущениям, что в ряде случаев гарантирует точную оценку даже при наличии таких возмущений. Кроме того, показывается, как преодолеть требование, связанное с условием согласования, использованное в [15] и ограничивающее возможности оценивания.

2. Основные модели и соотношения

Рассмотрим систему, описанную дискретной нелинейной моделью

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) + C\Psi(x(t), u(t)) + Dd(t) + L\rho(t), \\ y(t) &= Hx(t), \end{aligned}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ – векторы состояния, управления и выхода; F , G , H , C и L – известные постоянные матрицы, $\rho(t) \in \mathbb{R}^p$ – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая возмущения, действующие на систему; слагаемое $Dd(t)$ – неизвестный вход, величину которого требуется оценить. В частности, такой вход может представлять собой результат проявления возникшего в системе дефекта. Предполагается, что $d(t)$ – скалярная ограниченная функция: $\underline{d} \leq d(t) \leq \bar{d}$ при всех $t = 0, 1, 2, \dots$ для известных \underline{d} и \bar{d} . Нелинейный член $\Psi(x, u)$ представлен в виде

$$\Psi(x, u) = \begin{pmatrix} \varphi_1(A_1x, u) \\ \dots \\ \varphi_q(A_qx, u) \end{pmatrix},$$

A_1, \dots, A_q – известные постоянные матрицы-строки, $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ – произвольные нелинейные функции.

Замечание 1. В основной части работы, кроме раздела 7, по аналогии с [15] предполагается, что выполняется условие согласования $\text{rank}(HD) =$

$= \text{rank}(D)$, которое означает, что неизвестный вход $d(t)$ входит в уравнения для тех компонент вектора состояния, которые измеряются датчиками системы. В отличие от [15], где $d(t)$ – функция произвольной размерности, вначале предполагается, что $d(t)$ – скаляр; в разделе 8 показывается, как это ограничение можно снять.

Рассматриваемая задача вначале решается в линейном случае, когда $C = 0$. Как было сказано, решение ищется на основе редуцированной модели исходной системы. Для этого коротко напомним результаты работ [14, 16], где строится линейная модель системы (2.1) минимальной размерности, нечувствительная к возмущению и оценивающая некоторую переменную $y_*(t)$, задаваемую равенством $y_*(t) = R_*y(t)$ для матрицы R_* , подлежащей определению в ходе решения задачи. Такая модель описывается уравнениями

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x_*(t+1) &= F_*x_*(t) + J_*y(t) + G_*u(t) + D_*d(t), \\ y_*(t) &= H_*x_*(t) = R_*y(t), \end{aligned}$$

где $x_*(t) \in \mathbb{R}^k$, $k < n$ – размерность модели, F_* , G_* , J_* , H_* – матрицы, подлежащие определению. Для решения задачи предполагается, что существует матрица Φ такая, что $x_*(t) = \Phi x(t)$. Известно [14, 16], что матрицы, описывающие модель, удовлетворяют уравнениям

$$(2.3) \quad \Phi F = F_*\Phi + J_*H, \quad H_*\Phi = R_*H, \quad \Phi G = G_*, \quad \Phi D = D_*, \quad \Phi L = 0.$$

Необходимым условием возможности построения такой системы является неравенство

$$(2.4) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} < \text{rank}(H) + \text{rank}(L_0),$$

где L_0 – матрица максимального ранга такая, что $L_0L = 0$. Действительно, условие $\Phi L = 0$ тогда может быть записано в виде $\Phi = NL_0$ для некоторой матрицы N . Поскольку $H_*\Phi = R_*H$, то $H_*NL_0 = R_*H$, что справедливо при выполнении условия (2.4). Если оно не выполняется, то система, нечувствительная к возмущению и оценивающая переменную $y_*(t)$, построена быть не может. Ниже будем полагать, что условие (2.4) выполняется.

3. Построение модели, нечувствительной к возмущению

В общем случае матрицы F_* и H_* задаются в идентификационной канонической форме:

$$(3.1) \quad F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_* = (1 \ 0 \ \dots \ 0).$$

Если система (2.2) наблюдаема, то она всегда может быть приведена к виду с такими матрицами [17]. Если она не наблюдаема, то ее можно привести к

виду с наблюдаемой подсистемой и матрицы этой подсистемы искать в виде (3.1) [17]. Решение задачи осуществляется на основе уравнения

$$(3.2) \quad (R_* \quad -J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k})(W^{(k)} \quad L^{(k)}) = 0,$$

где J_{*i} – i -я строка матрицы J_* ,

$$W^{(k)} = \begin{pmatrix} HF^k \\ HF^{k-1} \\ \dots \\ H \end{pmatrix}, \quad L^{(k)} = \begin{pmatrix} HL & HFL & \dots & HF^{k-1}L \\ 0 & HL & \dots & HF^{k-2}L \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

матрица $W^{(k)}$ обеспечивает построение модели (2.2), $L^{(k)}$ – нечувствительность ее к возмущениям, т.е. выполнение условия $\Phi L = 0$. Уравнение (3.2) имеет нетривиальное решение, если

$$(3.3) \quad \text{rank}(W^{(k)} \quad L^{(k)}) < l(k+1),$$

поскольку в этом случае между строками составной матрицы $(W^{(k)} \quad L^{(k)})$ имеется линейная зависимость, что гарантирует существование решения.

Для построения модели из (3.3) начиная с $k = 1$ определяется минимальное k и из (3.2) – строка $(R_* \quad -J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k})$, затем на основе соотношений

$$R_*H = \Phi_1, \quad \Phi_i F = \Phi_{i+1} + J_{*i}H, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad \Phi_k F = J_{*k}H,$$

полученных из (2.3) и (3.1), строится матрица Φ ; G_* определяется из (2.3), где Φ_i – i -я строка матрицы Φ . Таким образом, линейная модель (2.2) построена; предполагается, что $D_* \neq 0$.

Если уравнение (3.2) не имеет решения при всех $k < n$, модели, нечувствительной к возмущениям, не существует. В этом случае можно воспользоваться робастными методами, изложенными, например, в [18], однако получаемая оценка уже не будет точной.

4. Решение задачи

Вначале для простоты предполагается, что $k = 1$, т.е. можно построить одномерную модель, которая с $F_* = 0$ и $H_* = 1$ описывается уравнениями

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x_*(t+1) &= J_*y(t) + G_*u(t) + D_*d(t), \\ y_*(t) &= x_*(t). \end{aligned}$$

Утверждение 1. Модель (4.1) существует при выполнении двух условий:

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{pmatrix} HF \\ H \end{pmatrix} &< \text{rank}(HF) + \text{rank}(H), \\ R_*HL &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Из (3.2) при $k = 1$ получаем

$$(R_* \quad -J_*) \begin{pmatrix} HF & HL \\ H & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

откуда следует равенство $(R_* \quad -J_*) \begin{pmatrix} HF \\ H \end{pmatrix} = 0$, которое выполняется тогда, когда справедливо первое условие. Второе условие прямо следует из предыдущего равенства.

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, модель будет многомерной. Дополнительным условием является требование чувствительности к дефектам $\Phi D = D_* \neq 0$, представленное в виде $R_* H D \neq 0$.

Замечание 2. Поскольку в модели (4.1) значения всех переменных, кроме $d(t)$, могут быть измерены, последняя может быть определена из простого соотношения $D_* d(t) = y_*(t+1) - J_* y(t) - G_* u(t)$. Учитывая каноническую форму матрицы F_* и вид получаемой при этом модели, можно утверждать, что путем образования временных сдвигов для переменной $y_*(t)$ и подстановок одних уравнений в другие (как это сделано в разделе 7) можно построить аналогичные соотношения и определять из них переменную $d(t)$. При $k > 2$ эти соотношения будут довольно громоздкими, использование интервальных наблюдателей позволяет существенно упростить их. Поэтому несмотря на очевидное решение при $k = 1$, покажем, как здесь могут быть применены такие наблюдатели, чтобы распространить полученный результат на общий случай.

Интервальный наблюдатель задается в виде

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= G_* u(t) + J_* y(t) + D_*^+ \underline{d} - D_*^- \bar{d} + g \underline{e}(t), \\ \bar{x}_*(t+1) &= G_* u(t) + J_* y(t) + D_*^+ \bar{d} - D_*^- \underline{d} + g \bar{e}(t), \\ \underline{y}_*(t) &= \underline{x}_*(t), \quad \bar{y}_*(t) = \bar{x}_*(t), \end{aligned}$$

где $A^+ = \max(0, A)$, $A^- = A^+ - A$ для произвольной матрицы A , нетрудно видеть, что $A^+ \geq 0$, $A^- \geq 0$; коэффициент g выбирается для обеспечения устойчивости наблюдателя; $\underline{e}(t) = y_*(t) - \underline{y}_*(t)$, $\bar{e}(t) = y_*(t) - \bar{y}_*(t)$.

Поскольку для интервального наблюдателя из условия $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$ следует, что при всех $t \geq 0$ справедливо соотношение $\underline{x}_*(t) \leq x_*(t) \leq \bar{x}_*(t)$ [4], то существует число $\alpha(t) \geq 0$ такое, что при всех $t \geq 0$

$$(4.3) \quad x_*(t) = \underline{x}_*(t) + \alpha(t)(\bar{x}_*(t) - \underline{x}_*(t)),$$

или

$$(4.4) \quad x_*(t) = \alpha(t)\bar{x}_*(t) + (1 - \alpha(t))\underline{x}_*(t).$$

Определим значение $\alpha(t+1)$. Из (4.3) при $t := t+1$ получаем

$$R_* y(t+1) = x_*(t+1) = \underline{x}_*(t+1) + \alpha(t+1)(\bar{x}_*(t+1) - \underline{x}_*(t+1)),$$

откуда

$$(4.5) \quad \alpha(t+1) = \frac{R_* y(t+1) - \underline{x}_*(t+1)}{\bar{x}_*(t+1) - \underline{x}_*(t+1)},$$

где все входящие в формулу величины могут быть измерены.

Теорема 1. Оценка функции $d(t)$ определяется как

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \hat{d}(t) &= D_*^{-1}(g(\alpha(t+1))\underline{e}(t) + (1 - \alpha(t+1))\bar{e}(t)) + \\ &+ \alpha(t+1)(D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d}) + (1 - \alpha(t+1))(D_*^+\bar{d} - D_*^-\underline{d}), \end{aligned}$$

где коэффициент $\alpha(t+1)$ рассчитывается согласно (4.5).

Доказательство. В (4.4), записанном для $t := t+1$, заменим переменные $x_*(t+1)$, $\underline{x}_*(t+1)$ и $\bar{x}_*(t+1)$ правыми частями уравнений (4.1) и (4.2) соответственно:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} &J_*y(t) + G_*u(t) + D_*d(t) = \\ &= \alpha(t+1)(G_*u(t) + J_*y(t) + D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d} + g\underline{e}(t)) + \\ &+ (1 - \alpha(t+1))(G_*u(t) + J_*y(t) + D_*^+\bar{d} - D_*^-\underline{d} + g\bar{e}(t)). \end{aligned}$$

После преобразований в правой части получаем

$$\begin{aligned} &J_*y(t) + G_*u(t) + D_*d(t) = \\ &= g(\alpha(t+1)\underline{e}(t) + (1 - \alpha(t+1))\bar{e}(t)) + G_*u(t) + J_*y(t) + \\ &+ \alpha(t+1)(D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d}) + (1 - \alpha(t+1))(D_*^+\bar{d} - D_*^-\underline{d}), \end{aligned}$$

откуда после простых преобразований следует (4.6).

Замечание 3. Канонический вид матрицы F_* позволяет утверждать, что наблюдатель (4.2) устойчив и без введения обратных связей $g\underline{e}(t)$ и $g\bar{e}(t)$; последние необходимы только для получения оценки $\hat{d}(t)$, причем в данном случае она будет точной для всех $t > 0$.

5. Многомерная модель

В случае $k > 1$ модель (2.2) принимает вид

$$\begin{aligned} x_{*1}(t+1) &= x_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + D_{*1}d(t), \\ x_{**}(t+1) &= F_{**}x_{**}(t) + J_{**}y(t) + G_{**}u(t) + D_{**}d(t), \\ y_*(t) &= x_{*1}(t), \end{aligned}$$

где x_{*i} – i -я компонента вектора x_* , $x_{**} = (x_{*2}, \dots, x_{*k})$, J_{**} , G_{**} и D_{**} – матрицы J_* , G_* и D_* с удаленными первыми строками, F_{**} – матрица (3.1) размера $(k-1) \times (k-1)$. Предполагается, что $D_{*1} \neq 0$ и $D_{**} = 0$, т.е. дефект входит только в первое уравнение. Интервальный наблюдатель имеет вид

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \underline{x}_{*1}(t+1) &= \hat{x}_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + D_{*1}^+\underline{d} - D_{*1}^-\bar{d} + g_1\underline{e}(t), \\ \hat{x}_{**}(t+1) &= F_{**}\hat{x}_{**}(t) + J_{**}y(t) + G_{**}u(t) + g_{**}\underline{e}(t), \\ \bar{x}_{*1}(t+1) &= \tilde{x}_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + D_{*1}^+\bar{d} - D_{*1}^-\underline{d} + g_1\bar{e}(t), \\ \tilde{x}_{**}(t+1) &= F_{**}\tilde{x}_{**}(t) + J_{**}y(t) + G_{**}u(t) + g_{**}\bar{e}(t), \\ \underline{y}_*(t) &= \underline{x}_{*1}(t), \quad \bar{y}_*(t) = \bar{x}_{*1}(t), \end{aligned}$$

т.е. интервально формируется только первая компонента вектора состояния. Здесь $\hat{x}_{**}(t)$ и $\tilde{x}_{**}(t)$ – векторы размерности $k - 1$, матрица $(g_1 \ g_{**}^T)^T$ выбирается для обеспечения устойчивости наблюдателя, что всегда можно сделать для канонической формы (3.1).

С учетом (5.1) выражение (4.7) модифицируется следующим образом:

$$\begin{aligned} & x_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + D_{*1}d(t) = \\ & = \alpha(t+1)(\tilde{x}_{*2}(t) + G_{*1}u(t) + J_{*1}y(t) + D_{*1}^+\underline{d} - D_{*1}^-\bar{d} + g_1\underline{e}(t)) + \\ & + (1 - \alpha(t+1))(\hat{x}_{*2}(t) + G_{*1}u(t) + J_{*1}y(t) + D_{*1}^+\bar{d} - D_{*1}^-\underline{d} + g_1\bar{e}(t)). \end{aligned}$$

Здесь $\alpha(t+1)$ определяется для первых компонент векторов состояния по аналогии с (4.5):

$$\alpha(t+1) = \frac{R_*y(t+1) - \underline{x}_{*1}(t+1)}{\bar{x}_{*1}(t+1) - \underline{x}_{*1}(t+1)}.$$

Проведя ряд преобразований, получаем

$$\begin{aligned} & D_{*1}d(t) = g_1(\alpha(t+1)\underline{e}(t) + (1 - \alpha(t+1))\bar{e}(t)) + \\ (5.2) \quad & + \alpha(t+1)(D_{*1}^+\underline{d} - D_{*1}^-\bar{d}) + (1 - \alpha(t+1))(D_{*1}^+\bar{d} - D_{*1}^-\underline{d}) + \\ & + \alpha(t+1)\tilde{x}_{*2}(t) + (1 - \alpha(t+1))\hat{x}_{*2}(t) - x_{*2}(t). \end{aligned}$$

Поскольку наблюдатель устойчив, то $\tilde{x}_{*2}(t) \rightarrow x_{*2}(t)$ и $\hat{x}_{*2}(t) \rightarrow x_{*2}(t)$, откуда следует $\alpha(t+1)\tilde{x}_{*2}(t) + (1 - \alpha(t+1))\hat{x}_{*2}(t) - x_{*2}(t) \rightarrow 0$, а тогда оценка $\hat{d}(t)$, определяемая выражением (4.6) с $D_* = D_{*1}$, будет удовлетворять соотношению $\hat{d}(t) \rightarrow d(t)$.

Замечание 4. Из полученных соотношений можно сделать вывод о том, что использование интервального наблюдателя позволяет устранить влияние всех компонент вектора $x_{**} = (x_{*2}, \dots, x_{*k})$ на конечный результат.

6. Учет нелинейностей

Метод синтеза модели в нелинейном случае опирается на ранее построенную линейную модель и состоит в том, что для найденной при построении линейной модели матрицы Φ выясняется возможность преобразования аргумента нелинейной составляющей $\Psi(x, u)$, делается это следующим образом [18].

Вычисляется матрица $C_* = \Phi C$ и определяются номера j_i, \dots, j_s ее ненулевых столбцов. Далее проверяется условие

$$(6.1) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ A' \end{pmatrix},$$

где матрица A' строится из матриц A_1, \dots, A_q с номерами j_i, \dots, j_s как из строк. Если это условие выполняется, преобразование аргумента возможно.

После этого строится нелинейная составляющая в виде

$$\Psi_*(x_*, y, u) = \begin{pmatrix} \varphi_{j_1}(A_{*j_1}z, u) \\ \dots \\ \varphi_{j_s}(A_{*j_s}z, u) \end{pmatrix},$$

где $z = \begin{pmatrix} x_* \\ y \end{pmatrix}$, матрицы-строки $A_{*j_1}, \dots, A_{*j_s}$ определяются из линейных уравнений

$$A_j = A_{*,j} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}, \quad j = j_1, \dots, j_s,$$

и добавляется к линейной модели (2.2). Если условие (6.1) не выполняется, необходимо найти другое решение уравнения (3.2) при прежней или увеличенной размерности k и повторить описанную процедуру с новой матрицей Φ . В общем случае нелинейная модель описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= F_*x_*(t) + J_*y(t) + G_*u(t) + C_*\Psi_*(x_*(t), y(t), u(t)) + D_*d(t), \\ y_*(t) &= H_*x_*(t). \end{aligned}$$

Если модель одномерна, то нелинейная составляющая зависит от $y_*(t) = x_*(t)$ и одинаковым образом входит в модель и интервальный наблюдатель, а тогда, как нетрудно видеть, точная оценка определяется выражением (4.6).

Для многомерной модели с учетом предположения, что $D_{*1} \neq 0$ и $D_{**} = 0$, получаем следующие описания модели:

$$\begin{aligned} x_{*1}(t+1) &= x_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + C_{*1}\Psi_{*1}(y_*(t), x_{**}(t), y(t), u(t)) + \\ &\quad + D_{*1}d(t), \\ x_{**}(t+1) &= F_{**}x_{**}(t) + J_{**}y(t) + G_{**}u(t) + C_{**}\Psi_{**}(y_*(t), x_{**}(t), y(t), u(t)) \end{aligned}$$

и интервального наблюдателя:

$$\begin{aligned} \underline{x}_{*1}(t+1) &= \hat{x}_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + C_{*1}\Psi_{*1}(y_*(t), \hat{x}_{**}(t), y(t), u(t)) + \\ &\quad + D_{*1}^+ \underline{d} - D_{*1}^- \bar{d} + g_1 \underline{e}(t), \\ \hat{x}_{**}(t+1) &= F_{**}\hat{x}_{**}(t) + J_{**}y(t) + G_{**}u(t) + C_{**}\Psi_{**}(y_*(t), \hat{x}_{**}(t), y(t), u(t)) + \\ &\quad + g_{**} \underline{e}(t), \\ \bar{x}_{*1}(t+1) &= \tilde{x}_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + C_{*1}\Psi_{*1}(y_*(t), \tilde{x}_{**}(t), y(t), u(t)) + \\ &\quad + D_{*1}^+ \bar{d} - D_{*1}^- \underline{d} + g_1 \bar{e}(t), \\ \tilde{x}_{**}(t+1) &= F_{**}\tilde{x}_{**}(t) + J_{**}y(t) + G_{**}u(t) + C_{**}\Psi_{**}(y_*(t), \tilde{x}_{**}(t), y(t), u(t)) + \\ &\quad + g_{**} \bar{e}(t), \\ \underline{y}_*(t) &= \underline{x}_{*1}(t), \quad \bar{y}_*(t) = \bar{x}_{*1}(t), \end{aligned}$$

где матрицы C_{*1} , C_{**} и функции Ψ_{*1} , Ψ_{**} определяются по аналогии с J_{*1} и J_{**} .

С учетом нелинейностей выражение (5.2) модифицируется следующим образом:

$$\begin{aligned}
D_{*1}d(t) = & g_1(\alpha(t+1)\underline{e}(t) + (1 - \alpha(t+1))\bar{e}(t)) + \\
& + \alpha(t+1)(D_{*1}^+\underline{d} - D_{*1}^-\bar{d}) + (1 - \alpha(t+1))(D_{*1}^+\bar{d} - D_{*1}^-\underline{d}) + \\
& + \alpha(t+1)\tilde{x}_{*2}(t) + (1 - \alpha(t+1))\hat{x}_{*2}(t) - x_{*2}(t) + \\
& + \alpha(t+1)C_{*1}\Psi_{*1}(y_*(t), \tilde{x}_{**}(t), y(t), u(t)) + \\
& + (1 - \alpha(t+1))C_{*1}\Psi_{*1}(y_*(t), \hat{x}_{**}(t), y(t), u(t)) - \\
& - C_{*1}\Psi_{*1}(y_*(t), x_{**}(t), y(t), u(t)).
\end{aligned}$$

Поскольку матрица обратной связи $(g_1 \ g_{**}^T)^T$ выбрана так, что наблюдатель устойчив, то $\tilde{x}_{**}(t) \rightarrow x_{**}(t)$ и $\hat{x}_{**}(t) \rightarrow x_{**}(t)$ и по аналогии с разделом 5 $\hat{d}(t) \rightarrow d(t)$.

7. Невыполнение условия согласования

Условие согласования нередко может не выполняться, однако предложенный подход может быть применен и в этом случае более сложным образом. Для простоты рассмотрим частный случай, когда $k = 2$ и слагаемое $D_*d(t)$ входит во второе уравнение линейной модели:

$$\begin{aligned}
x_{*1}(t+1) &= x_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t), \\
x_{*2}(t+1) &= J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + D_*d(t), \\
y_*(t) &= x_{*1}(t).
\end{aligned}$$

Интервальный наблюдатель принимает вид

$$\begin{aligned}
\underline{x}_{*1}(t+1) &= \underline{x}_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + g_1\underline{e}(t), \\
\underline{x}_{*2}(t+1) &= J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + g_2\underline{e}(t) + D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d}, \\
\bar{x}_{*1}(t+1) &= \bar{x}_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + g_1\bar{e}(t), \\
\bar{x}_{*2}(t+1) &= J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + g_2\bar{e}(t) + D_*^+\bar{d} - D_*^-\underline{d}, \\
\underline{y}_*(t) &= \underline{x}_{*1}(t), \quad \bar{y}_*(t) = \bar{x}_{*1}(t),
\end{aligned}$$

т.е. интервально формируются обе компоненты вектора состояния; переменные $\underline{e}(t)$ и $\bar{e}(t)$ определяются, как показано выше.

Найдем значения первых компонент модели и наблюдателя в момент $t + 2$, произведя временной сдвиг в первых уравнениях и выполнив замену переменных $x_{*2}(t+1)$, $\underline{x}_{*2}(t+1)$ и $\bar{x}_{*2}(t+1)$ правыми частями их уравнений:

$$\begin{aligned}
x_{*1}(t+2) &= J_{*1}y(t+1) + G_{*1}u(t+1) + J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + D_*d(t), \\
\underline{x}_{*1}(t+2) &= J_{*1}y(t+1) + G_{*1}u(t+1) + J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + \\
(7.1) \quad & + g_1\underline{e}(t+1) + g_2\underline{e}(t) + D_*^+\underline{d} - D_*^-\bar{d}, \\
\bar{x}_{*1}(t+2) &= J_{*1}y(t+1) + G_{*1}u(t+1) + J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + \\
& + g_1\bar{e}(t+1) + g_2\bar{e}(t) + D_*^+\bar{d} - D_*^-\underline{d}.
\end{aligned}$$

По аналогии с (4.5) определим

$$(7.2) \quad \alpha(t+2) = \frac{R_*y(t+2) - \underline{x}_{*1}(t+2)}{\overline{x}_{*1}(t+2) - \underline{x}_{*1}(t+2)},$$

образуем сумму

$$x_{*1}(t+2) = \alpha(t+2)\overline{x}_{*1}(t+2) + (1 - \alpha(t+2))\underline{x}_{*1}(t+2)$$

и заменим переменные $x_{*1}(t+2)$, $\overline{x}_{*1}(t+2)$ и $\underline{x}_{*1}(t+2)$ правыми частями уравнений (7.1):

$$\begin{aligned} & J_{*1}y(t+1) + G_{*1}u(t+1) + J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + D_*d(t) = \\ & = \alpha(t+2)(J_{*1}y(t+1) + G_{*1}u(t+1) + J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + \\ & \quad + g_1\overline{e}(t+1) + g_2\overline{e}(t) + D_*^+\overline{d} - D_*^-\underline{d}) + \\ & + (1 - \alpha(t+2))(J_{*1}y(t+1) + G_{*1}u(t+1) + J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + \\ & \quad + g_1\underline{e}(t+1) + g_2\underline{e}(t) + D_*^+\underline{d} - D_*^-\overline{d}). \end{aligned}$$

После преобразований получаем

$$(7.3) \quad \begin{aligned} D_*d(t) & = g_1(\alpha(t+2)\overline{e}(t+1) + (1 - \alpha(t+2))\underline{e}(t+1)) + \\ & + g_2(\alpha(t+2)\overline{e}(t) + (1 - \alpha(t+2))\underline{e}(t)) + \\ & + \alpha(t+2)(D_*^+\overline{d} - D_*^-\underline{d}) + (1 - \alpha(t+2))(D_*^+\underline{d} - D_*^-\overline{d}), \end{aligned}$$

откуда с очевидностью следует формула для оценки $\hat{d}(t)$.

Замечание 5. Выражение (7.3) очевидным образом обобщается на случай $k > 2$, когда слагаемое $D_*d(t)$ входит только в последнее уравнение модели, а с учетом изложенного в разделах 5 и 6 – на его вхождение только в одно произвольное уравнение и нелинейный случай. Предложенный подход сложен в реализации и при моделировании, поскольку требует выполнения дополнительных временных задержек для переменных $\underline{e}(t)$ и $\overline{e}(t)$ с целью получения выражения (7.3).

8. Решение на основе канонической формы Жордана

Если для всех решений уравнения (3.2) переменная $d(t)$ входит в модель в две и более ее компоненты, следует использовать не идентификационную каноническую форму, а диагональную жорданову, где

$$F_* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix},$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – собственные числа ($|\lambda_i| < 1$), которые предполагаются различными. Такая форма всегда может быть получена из канонической

формы (3.1) [16]. Тогда первое уравнение в (2.3) представляется в виде k независимых уравнений:

$$(8.1) \quad \Phi_i F = \lambda_i \Phi_i + J_{*i} H, \quad i = 1, \dots, k,$$

что и позволяет построить одномерную модель, куда будет входить переменная $d(t)$. Дополнительное требование $\Phi L = 0$ – нечувствительность к возмущениям – учитывается следующим образом. В связи с введенной ранее матрицей L_0 уравнение (8.1) может быть записано в виде

$$(8.2) \quad (N_i - J_{*i}) \begin{pmatrix} L_0(F - \lambda_i I_n) \\ H \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

где I_n – единичная $(n \times n)$ -матрица.

Для построения модели выбирается такое значение $\lambda = \lambda_i$, что определяемая из уравнения (8.2) матрица $\Phi = N L_0$ удовлетворяет требованиям $D_* = \Phi D \neq 0$ и $\Phi = R_* H$ для некоторой матрицы R_* .

Замечание 6. Требования $\Phi D \neq 0$ и $\Phi = R_* H$ не всегда могут быть выполнены, поскольку внешние возмущения, представленные матрицей L_0 , могут привести к ограничению множества решений уравнения (8.2) даже при соблюдении условия согласования. Это ограничение можно снять, но тогда решение не будет точным.

Модель принимает вид

$$(8.3) \quad \begin{aligned} x_*(t+1) &= \lambda x_*(t) + J_* y(t) + G_* u(t) + D_* d(t), \\ y_*(t) &= x_*(t). \end{aligned}$$

Несмотря на одномерность модели, использовать прием, показанный в замечании 2, здесь не получится, поскольку в правую часть уравнения (8.3) входит переменная $x_*(t)$, и необходимо строить интервальный наблюдатель, который описывается уравнениями

$$(8.4) \quad \begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= \lambda \underline{x}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + D_*^+ \underline{d} - D_*^- \bar{d} + g \underline{e}(t), \\ \bar{x}_*(t+1) &= \lambda \bar{x}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + D_*^+ \bar{d} - D_*^- \underline{d} + g \bar{e}(t), \\ \underline{y}_*(t) &= \underline{x}_*(t), \quad \bar{y}_*(t) = \bar{x}_*(t). \end{aligned}$$

Отметим, что независимо от значения λ коэффициент g всегда можно выбрать так, что наблюдатель будет устойчив.

Теорема 2. Оценка функции $d(t)$ определяется как

$$(8.5) \quad \begin{aligned} \hat{d}(t) &= D_*^{-1} g (\alpha(t+1) \underline{e}(t) + (1 - \alpha(t+1)) \bar{e}(t)) + \\ &+ \alpha(t+1) (D_*^+ \underline{d} - D_*^- \bar{d}) + (1 - \alpha(t+1)) (D_*^+ \bar{d} - D_*^- \underline{d}) + \\ &+ \lambda (\bar{x}_*(t) - \underline{x}_*(t)) (\alpha(t+1) - \alpha(t)). \end{aligned}$$

Переменная $\alpha(t)$ рассчитывается аналогично $\alpha(t+1)$, переменные $\bar{x}_*(t)$ и $\underline{x}_*(t)$ доступны для измерения.

Доказательство. Коэффициент $\alpha(t+1)$ определяется формулой (4.5), соотношение (4.7) принимает вид

$$\begin{aligned} & \lambda x_*(t) + J_* y(t) + G_* u(t) + D_* d(t) = \\ & = \alpha(t+1)(\lambda \bar{x}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + D_*^+ \underline{d} - D_*^- \bar{d} + g \underline{e}(t)) + \\ & + (1 - \alpha(t+1))(\lambda \underline{x}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + D_*^+ \bar{d} - D_*^- \underline{d} + g \bar{e}(t)). \end{aligned}$$

Правая часть этого равенства преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \lambda x_*(t) + J_* y(t) + G_* u(t) + D_* d(t) = \\ (8.6) \quad & = g(\alpha(t+1)\underline{e}(t) + (1 - \alpha(t+1))\bar{e}(t)) + \\ & + \alpha(t+1)(D_*^+ \underline{d} - D_*^- \bar{d}) + (1 - \alpha(t+1))(D_*^+ \bar{d} - D_*^- \underline{d}) + \\ & + J_* y(t) + G_* u(t) + \alpha(t+1)\lambda \bar{x}_*(t) + (1 - \alpha(t+1))\lambda \underline{x}_*(t). \end{aligned}$$

Учитывая, что переменная $x_*(t)$ в левой части (8.6) может быть представлена как

$$x_*(t) = \alpha(t)\bar{x}_*(t) + (1 - \alpha(t))\underline{x}_*(t),$$

объединяя ее с двумя последними слагаемыми в (8.6), получаем

$$\lambda(\bar{x}_*(t) - \underline{x}_*(t))(\alpha(t+1) - \alpha(t)),$$

что и дает (8.5).

Замечание 7. Описанный подход может быть применен, когда неизвестный вход $d(t)$ представляет собой вектор и выполняется условие согласования. В этом случае решение уравнение (8.2) ищется отдельно для каждой компоненты этого вектора и так же для каждой компоненты строится наблюдатель (8.4). Возможно, не для всех компонент удастся построить наблюдатель, нечувствительный к возмущению.

9. Практический пример

Рассмотрим дискретизированную модель электропривода:

$$\begin{aligned} (9.1) \quad & x_1(t+1) = k_1 x_2(t) + x_1(t), \\ & x_2(t+1) = k_2 x_2(t) + k_3 x_3(t) + \rho(t), \\ & x_3(t+1) = k_4 x_2(t) + k_5 x_3(t) + k_6 u(t) + d(t), \\ & y_1(t) = x_1(t), \quad y_2(t) = x_3(t), \end{aligned}$$

где x_1 – угол поворота выходного вала редуктора; x_2 – скорость вращения выходного вала двигателя; x_3 – ток цепи якоря; коэффициенты $k_1 - k_6$ зависят от параметров электропривода и интервала дискретизации; возмущение $\rho(t)$ обусловлено наличием внешнего нагрузочного момента, приведенного к валу двигателя; дефект, представленный функцией $d(t)$, вызван изменением активного сопротивления якоря, что выражается в изменении значения

коэффициента k_5 : если $\Delta k_5(t)$ – величина изменения коэффициента k_5 , то $d(t) = x_3(t)\Delta k_5(t)$. Рассматриваемая модель описывается матрицами согласно уравнениям (2.1):

$$F = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & k_3 \\ 0 & k_4 & k_5 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_6 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что условие согласования выполняется.

Модель, нечувствительная к возмущению, получается при решении уравнения (3.2) с $k = 1$, которое описывается матрицами

$$R_* = \begin{pmatrix} -k_4 & k_1 \end{pmatrix}, J_* = \begin{pmatrix} -k_4 & k_1 k_5 \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} -k_4 & 0 & k_1 \end{pmatrix}, G_* = k_1 k_6, D_* = k_1.$$

Искомая модель имеет вид

$$\begin{aligned} x_*(t+1) &= -k_4 y_1(t) + k_1 k_5 y_2(t) + k_1 k_6 u(t) + k_1 d(t), \\ y_*(t) &= x_*(t) = -k_4 y_1(t) + k_1 y_2(t). \end{aligned}$$

Интервальный наблюдатель описывается следующим образом:

$$(9.2) \quad \begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= -k_1 y_1(t) + k_1 k_5 y_2(t) + k_1 k_6 u(t) + k_1 \underline{d} + g \underline{e}(t), \\ \bar{x}_*(t+1) &= -k_1 y_1(t) + k_1 k_5 y_2(t) + k_1 k_6 u(t) + k_1 \bar{d} + g \bar{e}(t), \\ \underline{y}_*(t) &= \underline{x}_*(t), \quad \bar{y}_*(t) = \bar{x}_*(t), \end{aligned}$$

$\underline{e}(t) = y_*(t) - \underline{y}_*(t)$, $\bar{e}(t) = y_*(t) - \bar{y}_*(t)$. Оценка переменной $d(t)$ рассчитывается по формуле (4.6).

Для моделирования рассмотрим систему (9.1) и наблюдатель (9.2) при управлении $u(t) = 0,2 \sin(t/10)$, возмущение $\rho(t)$ представлено случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $[-0,05; 0,05]$; принято $\underline{d} = -0,4$, $\bar{d} = 0,4$, $g = -0,7$. На рис. 1 и 2 представлены результаты моделирования с начальными условиями $x(0) = (0 \ 0 \ 0)^T$, $\underline{x}_*(0) = -1$, $\bar{x}_*(0) = 1$. На рис. 1 показано поведение функции $d(t)$ и ошибки оценивания $\hat{d}(t) - d(t)$, когда функция $d(t)$ задана в виде $d(t) = 0,3 \sin(t/2)$, $t \leq 20$, $d(t) = 1$, $t > 20$; на рис. 2 – в виде $d(t) = 0,3 \sin(t/2)$, $t \leq 20$, при $t > 20$ функция $d(t)$ представлена случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $[-0,5; 0,5]$. Ошибка оценивания практически равна нулю.

Дополнительно для системы (9.1) рассмотрим задачу оценки неизвестного входа $\rho(t)$ при $d(t) = 0$; предполагается, что $|\rho(t)| \leq \rho_*$, т.е. $\underline{\rho} = -\rho_*$, $\bar{\rho} = \rho_*$. Нетрудно проверить, что условие согласования здесь не выполняется. Модель, решающая эту задачу, принимает размерность 2:

$$\begin{aligned} x_{*1}(t+1) &= x_{*2}(t) + K y_2(t), \\ x_{*2}(t+1) &= y_1(t) + (k_1 k_3 - K k_5) y_2(t) + k_1 \rho(t), \\ y_*(t) &= x_{*1}(t) = y_1(t), \end{aligned}$$

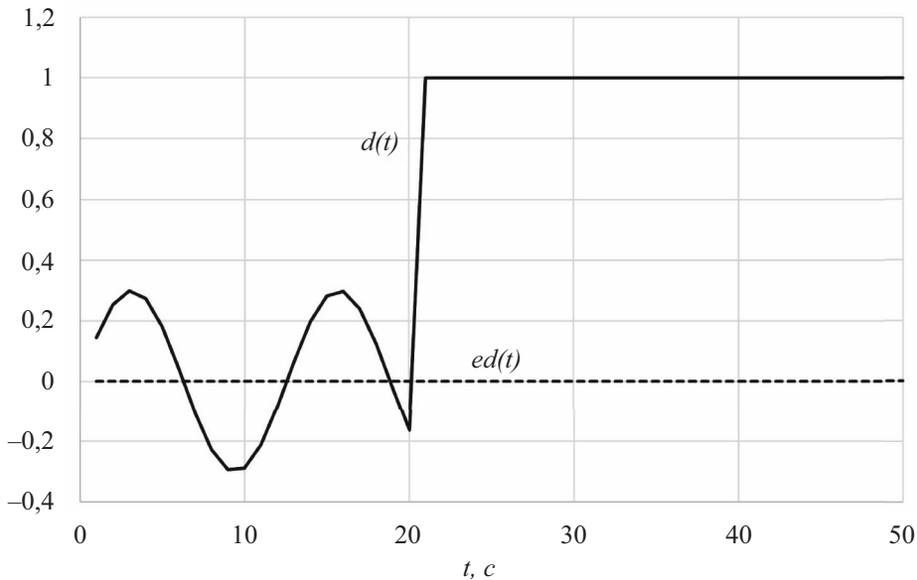


Рис. 1. Графики функций $d(t)$ и $ed(t) = \hat{d}(t) - d(t)$.

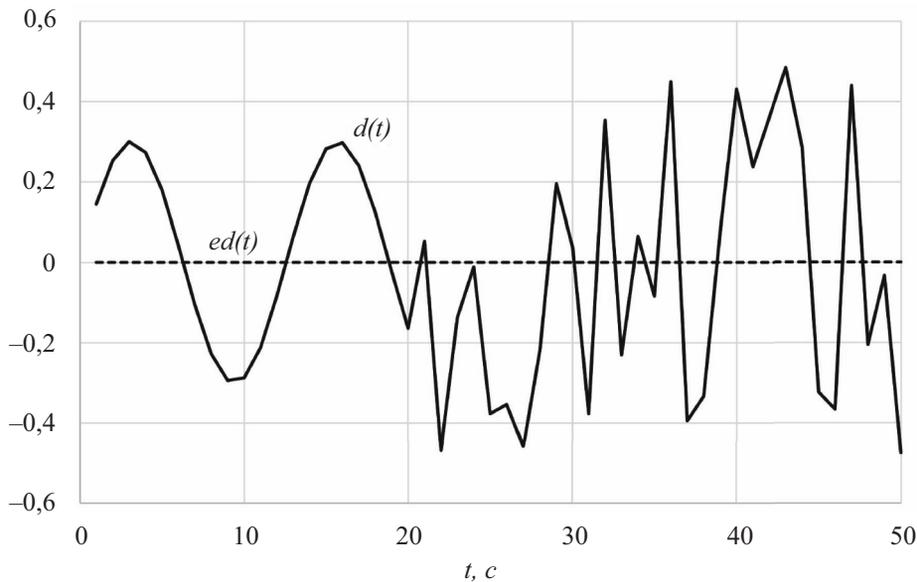


Рис. 2. Графики функций $d(t)$ и $ed(t) = \hat{d}(t) - d(t)$.

где $K = k_1(1 + k_2)/k_4$. Интервальный наблюдатель имеет вид

$$\begin{aligned} \underline{x}_{*1}(t+1) &= \underline{x}_{*2}(t) + Ky_2(t) + g_1\underline{e}(t), \\ \underline{x}_{*2}(t+1) &= y_1(t) + (k_1k_3 - Kk_5)y_2(t) - k_1\rho_* + g_2\underline{e}(t), \\ \bar{x}_{*1}(t+1) &= \bar{x}_{*2}(t) + Ky_2(t) + g_1\bar{e}(t), \\ \bar{x}_{*2}(t+1) &= y_1(t) + (k_1k_3 - Kk_5)y_2(t) + k_1\rho_* + g_2\bar{e}(t), \end{aligned}$$

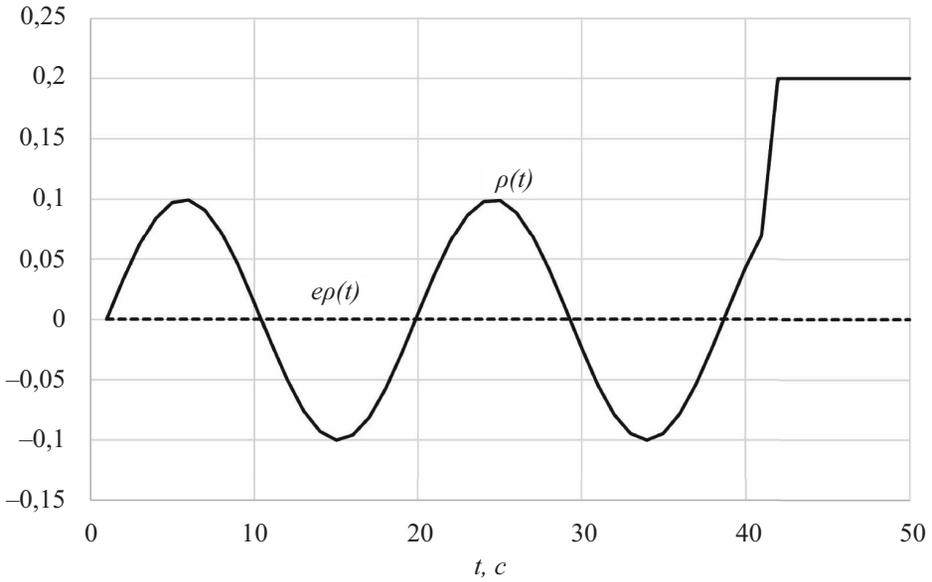


Рис. 3. Графики функций $\rho(t)$ и $e\rho(t) = \hat{\rho}(t) - \rho(t)$.

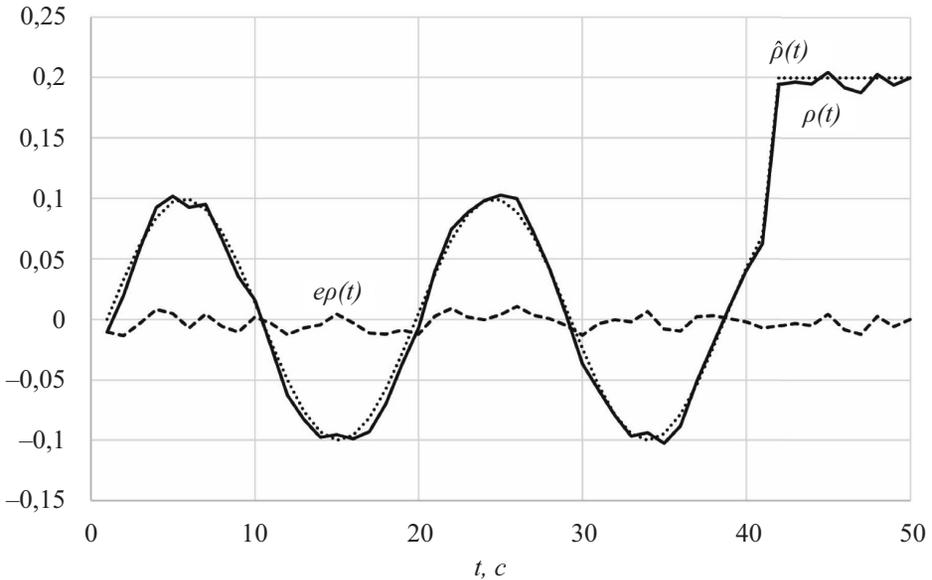


Рис. 4. Графики функций $\rho(t)$, $\hat{\rho}(t)$ и $e\rho(t) = \hat{\rho}(t) - \rho(t)$.

где $\underline{e}(t) = y_*(t) - \underline{x}_{*1}(t)$, $\bar{e}(t) = y_*(t) - \bar{x}_{*1}(t)$. Коэффициент $\alpha(t+2)$ определяется формулой (7.2) с $R_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Неизвестный вход $\rho(t)$ оценивается на основе выражения (7.3):

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) = & k_1^{-1}(g_1(\alpha(t+2)\bar{e}(t+1) + (1 - \alpha(t+2))\underline{e}(t+1)) + \\ & + g_2\bar{e}(t)(\alpha(t+2)\bar{e}(t) + (1 - \alpha(t+2))\underline{e}(t)) + \\ & + \alpha(t+2)k_1\rho_* - (1 - \alpha(t+2))k_1\rho_*). \end{aligned}$$

При моделировании с помощью пакета MATLAB принято $\rho_* = 0,2$, $g_1 = -0,4$, $g_2 = -0,1$. Результаты моделирования представлены на рис. 3 и 4, где показано поведение функции $\rho(t)$ и ошибки оценивания $\hat{\rho}(t) - \rho(t)$. На рис. 3 функция $\rho(t)$ задана в виде $\rho(t) = 0,3 \sin(t/2)$, $t \leq 40$, $\rho(t) = 1$, $t > 40$; как и выше, ошибка оценивания практически равна нулю; на рис. 4 дополнительно введены шумы измерений в виде двух независимых случайных величин, равномерно распределенных на интервале $[-0,01; 0,01]$, видно, что качество оценки ухудшается.

10. Заключение

В работе решена задача оценивания неизвестных входов в дискретных стационарных системах, описываемых линейными и нелинейными динамическими моделями при наличии внешних возмущений и выполнении так называемого условия согласования. Решение основано на модели исходной системы, имеющей минимальную размерность и нечувствительной к возмущениям. Для этой модели строится интервальный наблюдатель, на основе которого в ряде случаев может быть определена точная оценка величины неизвестных входов. Решение, полученное вначале для линейной одномерной модели, распространяется на многомерный и нелинейный случаи и системы, где условие согласования не выполняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Edwards C., Spurgeon S., Patton R.* Sliding mode observers for fault detection and isolation // *Automatica*. 2000. V. 36. P. 541–553.
2. *Yan X., Edwards C.* Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using sliding mode observers // *Automatica*. 2007. V. 43. P. 1605–1614.
3. *Жирабок А.Н., Зуев А.В., Сергиенко О., Шумский А.Е.* Идентификация дефектов в нелинейных динамических системах и их датчиках на основе скользящих наблюдателей // *АиТ*. 2022. № 2. С. 63–89.
Zhirabok A., Zuev A., Sergiyenko O., Shumsky A. Identification of faults in nonlinear dynamical systems and their sensors based on sliding mode observers // *Autom. Remote Control*. 2022. V. 83. No. 2. P. 214–236.
4. *Ефимов Д.В., Раисси Т.* Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // *АиТ*. 2016. № 2. С. 5–49.
Efomov D., Raissi T. Design of Interval State Observers for Uncertain Dynamical Systems // *Autom. Remote Control*. 2016. V. 77. No. 2. P. 191–225.
5. *Khan A., Xie W, Zhang L., Liu L.* Design and applications of interval observers for uncertain dynamical systems // *IET Circuits Devices Syst.* 2020. V. 14. P. 721–740.
6. *Khan A., Xie W, Bo Zhang C., Liu L.* A survey of interval observers design methods and implementation for uncertain systems // *J. Franklin Institute*. 2021. V. 358. P. 3077–3126.
7. *Chebotarev S., Efimov D., Raissi T., Zolghadri A.* Interval observers for continuous-time LPV systems with L1/L2 performance // *Automatica*. 2015. V. 51. P. 82–89.

8. *Efimov D., Polyakov A., Richard J.* Interval observer design for estimation and control of time-delay descriptor systems // Eur. J. Control. 2015. V. 23. P. 26–35.
9. *Efimov D., Fridman L., Raissi T., Zolghadri A., Seydou R.* Interval estimation for LPV systems applying high order sliding mode techniques // Automatica. 2012. V. 48. P. 2365–2371.
10. *Кремлев А.С., Чеботарев С.Г.* Синтез интервального наблюдателя для линейной системы с переменными параметрами // Изв. вузов. Приборостроение. 2013. Т. 56. №. 4. С. 42–46.
11. *Mazenc F., Bernard O.* Asymptotically stable interval observers for planar systems with complex poles // IEEE Trans. Autom. Control. 2010. V. 55. No. 2. P. 523–527.
12. *Zheng G., Efimov D., Perruquetti W.* Interval state estimation for uncertain nonlinear systems // IFAC Ncolcos 2013. Toulouse, France, 2013.
13. *Zhang K., Jiang B., Yan X., Edwards C.* Interval sliding mode based fault accommodation for non-minimal phase LPV systems with online control application // Int. J. Control. 2019. <https://doi.org/10.1080/00207179.2019.1687932>
14. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Ким Чхун Ир.* Метод построения интервальных наблюдателей для стационарных линейных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 5. С. 3–13.
15. *Zhu F., Zhang W., Zhang J., Guo S.* Unknown Input Reconstruction Via Interval Observer And State And Unknown Input Compensation Feedback Controller Designs // Int. J. Control, Autom. Syst. 2020. V. 18. P. 1–13.
16. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Филаретов В.Ф., Шумский А.Е., Ким Чхун Ир.* Интервальные наблюдатели для непрерывных систем с параметрическими неопределенностями // АиТ. 2023. № 11. С. 3–16.
Zhirabok A., Zuev A., Filaretov V., Shumsky A., Kim C. Interval observers for continuous-time systems with parametric uncertainties // Autom. Remote Control. 2023.
17. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
18. *Жиравок А.Н., Шумский А.Е., Соляник С.П., Суворов А.Ю.* Метод построения нелинейных робастных диагностических наблюдателей // АиТ. 2017. № 9. С. 34–48.
Zhirabok A., Shumsky A., Solyanik S., Suvorov A. Design of Nonlinear Robust Diagnostic Observers // Autom. Remote Control. 2017. No. 9. P. 1572–1584.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 16.12.2023

После доработки 04.05.2024

Принята к публикации 30.05.2024